

PREMIÈRE PARTIE (13 points)

Partie A : boîte de sauce tomate

1.

Notons V le volume de la boîte appelée $\frac{4}{4}$.

$$\text{On a : } V = \pi \times \left(\frac{9,9}{2}\right)^2 \times 11,8 = 289,1295\pi$$

Le volume en cm^3 de la boîte est de $289,1295\pi$, soit 908 cm^3 arrondi à l'unité.

2. $\frac{95}{100} \times 289,1295\pi = 274,673025\pi \approx 863.$

$$863 > 850.$$

$$1 \text{ cm}^3 = 1\text{mL}$$

Une boîte remplie à 95% contient bien au moins 850 mL de sauce tomate.

3. Si on double le diamètre d'une boîte $\frac{4}{4}$, le volume V' de cette boîte sera égal à :

$$V' = \pi \times \left(\frac{19,8}{2}\right)^2 \times 11,8 = 1156,518\pi$$

On a : $\frac{V'}{V} = \frac{1156,518\pi}{289,1295\pi}$ soit $\frac{V'}{V} = 4.$

Le volume de la boîte est donc le quadruple du volume de la boîte $\frac{4}{4}$, et non le double.

4. Notons V'' le volume de cette boîte $\frac{1}{4}$.

$$\text{On a : } V'' = \pi \times \left(\frac{7,3}{2}\right)^2 \times 5,4 = 71,9415\pi.$$

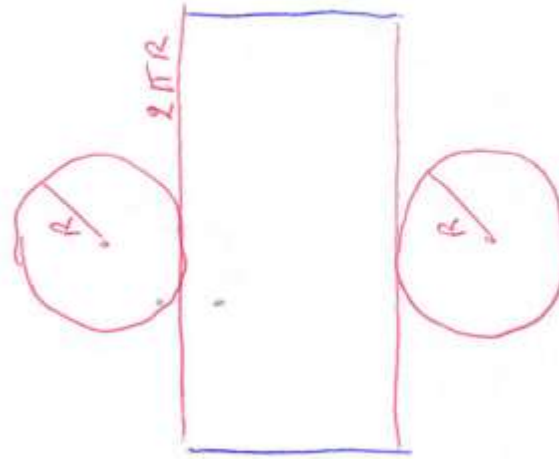
Le volume de cette boîte cylindrique est donc de 226 cm^3 , valeur arrondie au cm^3 près.

Ce volume est à peu près égal au quart du volume d'une boîte $\frac{4}{4}$, d'où le nom de son format.



Partie B : minimisation du coût de fabrication d'une boîte de conserve.

1.



2. On a : $V = \pi \times (r)^2 \times h = 908$ donc $h = \frac{908}{\pi r^2}$ avec h et r exprimé en cm.

3. a. C'est la proposition 2 qui est correcte : $=PI()*A2*A2$

b. L'aire totale du cylindre est égale à la somme de l'aire latérale et du double de l'aire du disque de base.

D'où la formule : $=2*C2+D2$

c. La colonne E correspond à l'aire totale du cylindre. La plus petite valeur de cette colonne est donnée en cellule E6, soit 520,3.

On ne peut pas savoir si la valeur minimale A_{min} de l'aire totale du cylindre pour un rayon compris entre 4 et 5 cm ou entre 5 et 6 cm.

L'encadrement d'amplitude minimal du rayon r en cm pour A_{min} est donc $4 < r < 6$.

4. a. La courbe représentative de l'aire totale en fonction du rayon n'est pas une droite passant par l'origine du repère, donc n'est pas la représentation graphique d'une fonction linéaire. L'aire totale A n'est donc pas proportionnelle au rayon r .

b. Il suffit de déterminer l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4,24. On obtient environ 540. L'aire totale pour un rayon de 4,24 cm est donc d'environ 540 cm^2 .

c. On lit les antécédents par la fonction du nombre 530, c'est-à-dire on lit les abscisses des deux points d'intersection entre la droite d'équation $y=530$ et de la courbe représentative de l'aire totale. On lit 4,52 et 6,04. Les rayons correspondant à une aire totale de 530 cm^2 sont 4,52 cm et 6,04 cm.



d. L'ordonnée du point « le plus bas » de la courbe est 519. L'aire totale minimale est donc de 519 cm^2 .

e. L'abscisse du point d'ordonnée 519 est 5,24. Le rayon correspondant est de 5,24 cm.

f. D'après la question 2, on a : $h = \frac{908}{\pi r^2}$ Pour $r = 5,24$, on a : $h = \frac{908}{\pi \times 5,24^2} \approx 10,526 \text{ cm}$.
La hauteur correspondante est de 105 mm, valeur arrondie au millimètre près.

Partie C : livraison des boîtes

Carton n° 1 :

Longueur du carton : $5 \times 9,9 = 49,5 \text{ cm}$

Largeur du carton : $5 \times 9,9 = 49,5 \text{ cm}$

Somme des 3 dimensions du carton : $11,8 + 49,5 + 49,5 = 110,8 \text{ cm}$
 $110,8 > 100$

La contrainte sur la somme des dimensions n'est pas respectée.

Carton n° 2 :

Longueur du carton : $4 \times 9,9 = 39,6 \text{ cm}$

Largeur du carton : $2 \times 9,9 = 19,8 \text{ cm}$

Hauteur du carton : $3 \times 11,8 = 35,4 \text{ cm}$

Somme des trois dimensions : $39,6 + 19,8 + 35,4 = 94,8 \text{ cm}$.

La contrainte sur la somme des dimensions est bien respectée ($94,8 < 100$).

Chaque carton 2 contient $3 \times 4 \times 2$ boîtes soit 24 boîtes.

Masse des 24 boîtes : $24 \times 0,88 = 21,12 \text{ kg}$.

La contrainte sur la masse du carton est respectée ($21,12 < 22$).

Carton n° 3 :

Chaque carton 2 contient $3 \times 3 \times 3$ soit 27 boîtes.

Masse des 27 boîtes : $27 \times 0,88 = 23,76 \text{ kg}$.

La contrainte sur la masse d'un carton n'est pas respectée ($23,76 > 22$).

Conclusion : seul le carton 2 peut convenir.



DEUXIÈME PARTIE (13 points)

EXERCICE 1

1.

Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires en A, donc le triangle ABC est rectangle en A. On peut donc utiliser le théorème de Pythagore dans ce triangle.

On a : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

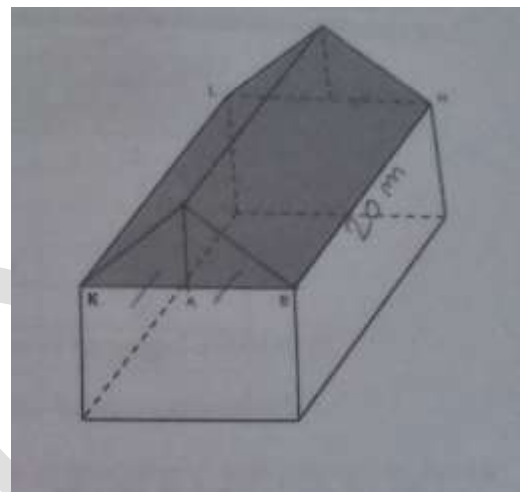
avec $AB=432 \text{ cm} = 4,32 \text{ m}$ et $AC = 390 \text{ cm} = 3,90 \text{ m}$.

On en déduit que : $BC^2 = 4,32^2 + 3,90^2$

Soit encore $BC^2 = 33,8724$.

$$BC = \sqrt{33,8724} = 5,82.$$

On a bien $BC = 5,82 \text{ m}$.



2. a. Dans le triangle ABC, la droite (DE) et la droite (AC) sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB). Elles sont donc parallèles.

D est un point du segment [AB] et E appartient au segment [BC].

Les triangles BDE et ABC forment donc une configuration de Thalès.

D'après le théorème de Thalès, on a : $\frac{BD}{BA} = \frac{DE}{AC}$.

Puisque $DE = 1,80 \text{ m}$, $AB = 4,32 \text{ m}$ et $AC = 3,90 \text{ m}$, on obtient : $\frac{BD}{4,32} = \frac{1,80}{3,90}$.

D'où : $BD = \frac{1,80 \times 4,32}{3,90} = \frac{7,776}{3,90} = \frac{648}{325} \approx 1,99$

Puisque le point D appartient au segment [AB], on a : $AD = AB - BD$.

On en déduit donc que $AD \approx 2,33 \text{ m}$.

Le point D se situe à une distance du point A de 2,33 mètres, valeur arrondie au cm près.

b. La surface pour laquelle nous devons calculer la superficie Carrez est un rectangle de longueur 20 mètres et de largeur $2 \times AD$ mètres.

L'aire de ce rectangle a donc pour mesure $20 \times 2 \times AD \text{ m}^2$ soit $40 \times AD \text{ m}^2$.

La valeur arrondie au mètre carré de la superficie Carrez des combles est donc de 93.

EXERCICE 2

1. Calculons le nombre de billets gagnants.

On a : $1 + 5 + 10 + 14 + 30 + 100 = 160$.

Il y a donc 160 billets gagnants parmi les 4 000 tickets de tombola.

Soit p la probabilité qu'Isabelle gagne un lot en achetant un ticket de tombola.

On a : $p = \frac{160}{4\,000} = 0,04$.

La probabilité qu'Isabelle gagne un lot en achetant un ticket de Tombola est bien de 0,04.



2. Il y a 100 peluches à gagner. La probabilité qu'Isabelle gagne une peluche en achetant un ticket de tombola est de $\frac{100}{4\,000}$, soit $\frac{1}{40}$ (fraction irréductible) ou encore 2,5 %.

3. Les lots dont la valeur dépasse 100 euros sont les Smartphones, les lecteurs Blu-ray et le téléviseur. Il y a donc 16 tickets gagnants dont la valeur dépasse 100 euros.

La probabilité qu'Isabelle gagne un lot dont la valeur est au moins 100 euros est de $\frac{16}{4\,000}$ ou encore $\frac{1}{250}$.

4. Il suffit de calculer une moyenne arithmétique pondérée.

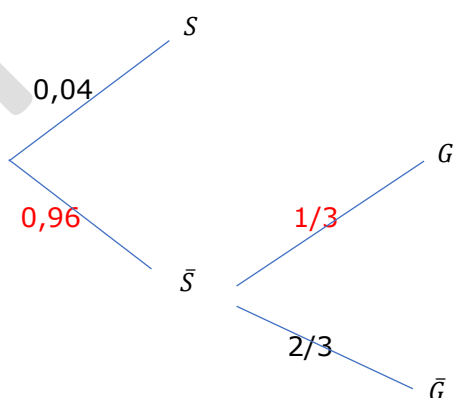
$$\frac{1 \times 899 + 5 \times 250 + 10 \times 125 + 14 \times 59 + 30 \times 15 + 100 \times 0,50}{1 + 5 + 10 + 14 + 30 + 100} = \frac{4\,725}{160} = \frac{945}{32} = 29,53125.$$

La valeur moyenne d'un lot gagnant est de 29,53 euros, valeur arrondie au centime près d'euro.

5. Les 4 000 tickets de tombola sont tous vendus à 2 € l'unité, la recette sera donc de 8 000 €. La dépense engagée par les lots gagnants est de 4 725 € (cf. question 4.). La tombola a donc rapporté la somme de 3 275 €.

6. Pour que la personne gagne un lot publicitaire, elle ne doit pas avoir gagné de lot au premier tirage. Notons S l'événement « la personne gagne un lot au premier tirage », G l'événement « la personne gagne un lot au second tirage ». Les événements \bar{S} et \bar{G} sont respectivement les événements contraires des événements S et G . On a, d'après l'énoncé, $p(S) = 0,04$ et $p(G) = \frac{1}{3}$. On en déduit donc les probabilités des événements contraires.

Modélisons cette expérience aléatoire par un arbre de probabilités.



Les événements \bar{S} et G sont deux événements indépendants. La probabilité qu'une personne ayant acheté un ticket gagne un lot publicitaire est donc égale au produit $0,96 \times \frac{1}{3}$ soit 0,32 (ou 32%).

EXERCICE 3

- En rentrant la valeur 10 dans le programme A, il donnera respectivement les valeurs $a=10$, $b=6$ ($10-4$), $c=36$ (6×6), $d=20$ ($36-16$)
La variable affichée d sera donc bien égale à 20.
- Si on entre 5,2 comme valeur d'entrée dans le programme B, on obtient $5,2-4=1,2$ pour la première ligne de calcul, puis $1,2 \times (2 \times 5,2) = 12,48$. Le résultat sera donc 12,48.
- Notons x la valeur d'entrée et donnons les résultats affichés par les deux programmes A et B en fonction de x .
Pour le programme A :
On a successivement $a = x$; $b = x - 4$; $c = (x - 4)^2$; $d = (x - 4)^2 - 16$.
La valeur affichée par le programme A est donc $(x - 4)^2 - 16$.
Pour le programme B :
On a successivement et ligne par ligne x ; $x - 4$; $2x \times (x - 4)$.
Le résultat affiché par le programme B est donc $2x \times (x - 4)$.

Pour avoir un éventuel résultat identique, on doit résoudre l'équation :

$$2x \times (x - 4) = (x - 4)^2 - 16.$$

Développons les deux membres de cette équation :

$$2x^2 - 8x = x^2 - 8x + 16 - 16.$$

Simplifions :

$$2x^2 - 8x = x^2 - 8x$$

D'où :

$$2x^2 - x^2 = -8x + 8x$$

D'où :

$$x^2 = 0 \text{ soit } x = 0$$

Les programmes A et B peuvent donner un résultat identique pour la seule valeur 0 en entrée.

On doit résoudre l'équation : $(x - 4)^2 - 16 = 0$ qui est équivalente à : $(x - 4)^2 - 4^2 = 0$ (1).
On reconnaît une identité remarquable.

L'équation (1) est équivalente à $(x - 4 + 4) \times (x - 4 - 4) = 0$ soit encore $x(x - 8) = 0$.

Cette équation produit a pour solutions les valeurs 0 et 8.

Conclusion : pour obtenir 0 comme résultat avec le programme A, il faut entrer soit 0 soit 8 comme valeur initiale.



TROISIÈME PARTIE (14 points)

SITUATION 1 :

1. Calcul proposé : $13,25 \times 10$.

Elève	Réponse de l'élève	Erreurs éventuelles	Analyse des erreurs
1	1,325	A décalé la virgule d'un rang vers la gauche	A divisé par 10 au lieu de multiplier par 10. Cet élève sait qu'il faut décaler la virgule d'un cran mais ne sait pas dans quel sens.
2	130,25	A multiplié par 10 la partie entière	Cet élève laisse la partie décimale de côté et applique ce qu'il sait faire avec les nombres entiers. En multipliant 13 unités par 10 on obtient 13 dizaines. Il transfère une règle construite avec les nombres entiers : « multiplier par 10, c'est ajouter un zéro à droite ».. Mais elle se cumule avec la construction du nombre décimal comme juxtaposition de deux entiers.
3	13,250	A « ajouté » un zéro à droite de la partie décimale	Cet élève transfère une règle qu'il a pu construire avec les entiers « multiplier par 10, c'est ajouter un zéro à droite ».
4	132,5	Aucune erreur	

2. a/

Proposition 1 (élève 1) : cette proposition est déniée de sens car on ne comprend pas pourquoi il faut ajouter un zéro à droite. En appliquant cette méthode, l'élève 1 aura un résultat incorrect car il obtiendra 13,250 comme résultat de la multiplication.



Cette règle est à proscrire pour les nombres entiers aux cycles 2 et 3, et il est important que l'enseignant ne la cautionne pas lorsqu'elle est proposée par un élève, **car elle ne se prolonge pas aux nombres décimaux.**

Proposition 2 (élève 2) : cette seconde proposition est aussi déniée de sens car les élèves auront une représentation de cette méthode avec une virgule qui se déplace. En l'occurrence, ce sont les «chiffres qui se déplacent».

b/ **Institutionnalisation :**

Multiplier un nombre décimal par 10, c'est donner à chaque chiffre une valeur 10 fois plus grande,

- le chiffre des unités devient donc le chiffre des dizaines,
- le chiffre des dixièmes devient celui des unités, etc.

Par exemple, 12,37 c'est 12 unités, 3 dixièmes et 7 centièmes

$12,37 \times 10$ c'est donc 12 dizaines, 3 unités et 7 dixièmes, donc 123,7.

3.

Le « glisse-nombre » est un outil très efficace permettant d'illustrer le fait que lorsque l'on multiplie ou divise un nombre par une puissance de 10 ce n'est pas la virgule qui se déplace mais les chiffres qui composent le nombre qui prennent une valeur 10 fois supérieure ou 10 fois inférieure.

L'outil présente l'avantage de donner à voir, physiquement, les chiffres se déplacer dans la colonne de gauche où leur valeur sera dix fois plus grande, ou dans la colonne de droite où leur valeur sera dix fois plus petite et permet ainsi d'éviter que les élèves construisent des procédures erronées conduisant à des erreurs régulièrement rencontrées comme $13,25 \times 10 = 130,25$ ou encore $13,25 \times 10 = 13,250$.

Les élèves 1 et 3 vont donc glisser le nombre d'un cran vers la droite (en tirant la languette), ils visualiseront donc le produit attendu.

De la même manière, l'élève 2 va se rendre compte que la structure du nombre ne change pas. 5 centièmes vont devenir 5 dixièmes, 2 dixièmes vont devenir 2 unités, 3 unités vont devenir 3 dizaines et 1 dizaine va devenir 1 centaine.



SITUATION 2 :

1. Analyse des productions d'élèves :

Production A	Production B
<p>Procédure : Cet élève n'a pas su modéliser le problème. Il utilise une addition pour résoudre le problème.</p> <p>Réussites : Il sait effectuer une addition posée en colonne de trois nombres décimaux, bonne gestion de la retenue. Il donne une phrase réponse qui correspond au résultat de son addition.</p> <p>Éventuelles erreurs :</p> <ul style="list-style-type: none"> - oubli du prix d'une viennoiserie dans son calcul - utilise tous les nombres donnés dans le problème dans un calcul additif (peut-être du un contrat didactique qui laisserait penser que tous les nombres donnés dans un problème doivent être utilisés) - phrase réponse incorrecte 	<p>Procédure : Cet élève a su modéliser le problème. Il utilise une addition pour calculer le prix des achats puis soustrait ce prix au 10 euros.</p> <p>Réussites : L'élève a compris le problème. Il sait effectuer une addition de trois nombres décimaux avec retenue et en colonne. Il utilise la procédure attendue.</p> <p>Il donne une phrase réponse qui est cohérente avec le résultat de sa dernière opération.</p> <p>Éventuelles erreurs :</p> <p>La soustraction de deux décimaux posée en colonne est erronée. Cet élève considère au 65 ôté de 0 est égal à 65.</p> <p>La phrase réponse est incorrecte.</p>
Production C	Production D
<p>Procédure : Cet élève a su modéliser le problème. Il calcule le prix total des trois achats sous la forme d'une addition posée en colonne, puis il soustrait son résultat à 10 euros.</p> <p>Réussites : L'élève a parfaitement compris le problème. Il calcule mentalement le prix des deux viennoiseries et l'additionne au prix du pain acheté. Il sait effectuer en ligne une addition de deux nombres décimaux et une soustraction de deux nombres décimaux posée en colonne (technique par compensation). L'élève trouve le bon résultat.</p> <p>Il donne une phrase réponse correcte.</p> <p>Éventuelle erreur : Aucune erreur.</p>	<p>Procédure : Cet élève a modélisé le problème en omettant le prix d'une viennoiserie. Il calcule le prix d'une viennoiserie et du pain sous la forme d'une addition posée en colonne. Il soustrait ensuite son résultat à 10 euros sous la forme d'une soustraction en ligne. Il pensait peut être qu'il était capable de la faire mentalement.</p> <p>Réussites : Il effectue correctement l'addition de deux nombres décimaux avec retenue.</p> <p>Éventuelles erreurs :</p> <p>Il oublie le prix d'une viennoiserie.</p> <p>La différence obtenue entre 10 et 3,50 est erronée. Il a sans doute calculé l'écart entre 10 et 3 et a obtenu 7. Il n'a pas considéré la partie décimale.</p> <p>Le résultat est faux.</p> <p>Il manque la phrase réponse, mais il entoure son résultat final.</p>



2. Remédiations proposées pour l'élève A :

Elles sont sous deux formes :

- matérielle avec l'apport d'un billet de 10 euros et de pièces de monnaie (fictifs).
- Imagée : schématisation du problème, illustration (pain et viennoiseries) de la situation pour l'expliquer.

3. Deux propositions :

- Faire calculer par cet élève la somme de la différence obtenue (6,65) avec le second terme de la soustraction (4,65) et comparer la somme avec 10.
- Faire calculer mentalement 4 ôté de 10, l'élève va trouver 6 et en comparant avec son résultat il se rendra compte de son erreur (en effet il restera 65 centimes à retirer de 6 euros).

4. La principale difficulté du problème précédent résultait de la soustraction de 10 par 4,65, et non de la somme des décimaux. En effet les deux termes de la soustraction n'ont pas le même nombre de chiffres dans la partie décimale. Elle était difficile à faire mentalement.

En simplifiant le problème (il ne reste que le prix du pain à retirer des 10 euros), l'élève pourra résoudre le problème sans passer par la soustraction de deux décimaux. En effet, il pourra utiliser des additions successives : $2,50 + 0,50 = 3$ et $3 + 7 = 10$. Il obtiendra donc 7,50 euros sans passer par la méthode experte : l'utilisation de la soustraction.

L'enseignant ne pourra donc pas savoir si l'élève est capable d'effectuer la soustraction des deux termes 10 et 2,50.

SITUATION 3 :

1. L'intérêt de la situation proposée est de travailler la structuration de l'espace et le vocabulaire employé (devant, derrière, sur, sous, entre).

La compétence ciblée est de situer des objets entre eux ou par rapport à des objets repères.

La limite de cette situation est que les élèves vont raisonner sur des images, donc dans un micro-espace. Il serait mieux que les élèves raisonnent dans le méso-espace, qu'ils puissent se déplacer autour des objets.

La mise en image est aussi abstraite, une difficulté supplémentaire. Certains élèves de grande section n'ont pas encore accès à l'abstraction.

2. Affirmation C :

Image 3 : le koala est bien sur un cube. Réponse correcte.

Image 8 : le koala est sur une colonne de cubes, donc sur plusieurs cubes.

Image 6 : le koala est à cheval sur deux cubes (un pont). Accepte-t-on cette réponse ?

Le koala est bien sur des cubes, mais la l'affirmation D proposée permet de réfuter cette réponse.

Les erreurs sont donc dues à l'interprétation de la consigne ou de langage et non aux propriétés topologiques de l'espace.

Affirmation E ;

Image 2 : bonne réponse, le koala est bien sous le pont.

Image 6 : l'élève a confondu « sur » et « sous ».



3. Seule une image faisait apparaître une princesse. On ne peut donc rien déduire sur la bonne compréhension du vocabulaire employé.
4. Le choix de l'enseignant est cohérent. Il simplifie la situation puisqu'elle ne sera plus imagée. Le rapport ne sera plus évoqué, mais effectif avec la manipulation des objets.

FORPROF

